Szeregi liczbowe

Definicja 1

Niech $\{a_n\}$ będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Szeregiem nieskończonym o wyrazie ogólnym a_n nazywamy wyrażenie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots$$

Sumę $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ dla $n \geqslant 1$ nazywamy sumą częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli istnieje granica (skończona) $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Liczbę S nazywamy wtedy sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Przykład 1 Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Jego wyraz ogólny to $a_n = \frac{1}{2^n}(n \geqslant 1)$.

Jest to zatem ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{2}$ i o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Kolejne sumy częściowe tego szeregu mają wartości:

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

...

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

Stosując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ otrzymujemy:

$S_n = \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$ więc widzimy, że omawiany szereg jest zbieżny, a jego suma jest równa 1.

Czyli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Przykład 2 Wykażemy, że jeżeli $|q| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$ jest zbieżny, a jego suma jest równa $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Rozwiązanie

Kolejne wyrazy szeregu, to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie q.
Suma częściowa S_n tego szeregu jest postaci:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = 1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ponieważ $|q| < 1$, więc $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Stąd otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

Przykład 3 Wyznaczymy sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
Łatwo zauważyć, że $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
Zatem $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
Suma szeregu jest więc równa $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Twierdzenie 1 (Warunek konieczny zbieżności szeregu)
Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Inaczej mówiąc jeżeli granica wyrazu ogólnego w nieskończoności jest różna od zera, to szereg jest rozbieżny.

Dowód

Posłużymy się oczywistym wzorem $S_n = S_{n-1} + a_n$ skąd $a_n = S_n - S_{n-1}$
Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i że S jest jego sumą.
Obliczmy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Przykład 4 Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots$ jest rozbieżny.

Dowód

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.
Zatem szereg jest rozbieżny.

Definicja 2 (bezwzględna zbieżność szeregu liczbowego).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Fakt 1
Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Fakt 2
Każdy szereg zbieżny o wyrazach dodatnich jest bezwzględnie zbieżny.

Definicja 3 (Warunkowa zbieżność szeregu)

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, gdy jest on zbieżny ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Działania na szeregach zbieżnych

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykłady szeregów zbieżnych

a) Szereg $1 + q + q^2 + \ldots$

b) Szereg $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha}$ dla $\alpha > 1$

Kryteria zbieżności szeregów

1. Kryterium porównawcze

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami liczbowymi o wyrazach nieujemnych. Jeżeli dla $n > n_0$ (dla prawie wszystkich n) jest $0 \leqslant a_b \leqslant b_n$, to

a) ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Przykład 5

Na podstawie kryterium porównawczego możemy napisać $\frac{|\sin(n!)|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Wynika stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n!)|}{2^n}$ jest zbieżny (bo zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$).

2. Kryterium Cauchy'ego

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest:

a) zbieżny, gdy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ (gdy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, to kryterium nie rozstrzyga o zbieżności)
b) rozbieżny, gdy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

Przykład 6

Wykażemy, szereg że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ jest zbieżny.
Dowód

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$. (ponieważ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Wynika z tego, że szereg jest zbieżny.

3. Kryterium d'Alemberta
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest:
a) zbieżny, gdy $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$,
b) rozbieżny, gdy $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Uwaga Podobnie jak dla kryterium Cauchy'ego jeśli powyższa granica ma wartość 1, to kryterium nie rozstrzyga o zbieżności.

4. Kryterium Leibnitza (Dla szeregów naprzemiennych)
Jeżeli ciąg liczbowy $\{a_n\}$ spełnia warunki:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
b) ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący,
to szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Przykład 7
Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. (Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny).

Dowód
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ oraz ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Zatem na podstawie kryterium Leibnitza otrzymujemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny.

Szeregi funkcyjne

Szeregiem funkcyjnym nazywamy wyrażenie $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$

gdzie: $f_k(x)$ dla $k \geqslant 1$ są wyrazami szeregu funkcyjnego (są to funkcje jednego argumentu x określone na pewnym przedziale (a, b)).
Suma częściowa szeregu funkcyjnego jest definiowana analogicznie jak suma częściowa szeregu liczbowego.

Czyli suma częściowa szeregu funkcyjnego o wyrazie ogólnym $f_k(x)$ ma postać:
$S_n = \sum_{n=1}^{n} f_n(x)$
Może się zdażyć, że dla dowolnej wartości $x \in (a, b)$ szereg funkcyjny jest zbieżny. Może być też tak, że dla pewnych x jest zbieżny a dla pewnych rozbieżny.

Zazwyczaj szereg funkcyjny jest zbieżny dla pewnych x a dla innych nie. Zbiór tych wartości x, dla których szereg funkcyjny jest zbieżny nazywamy obszarem zbieżności szeregu funkcyjnego.

Przykład 8

Rozważmy szereg funkcyjny $1 \cdot x + 1 \cdot 2 \cdot x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$.
Szereg ten jest określony dla $x \in \mathbb{R}$ lecz jest zbieżny tylko dla $x = 0$.
Dla innych (różnych od zera) wartości x, szereg ten jest rozbieżny.

Aby to wykazać posłużymy się kryterium d'Alemberta dla $x_0 \neq 0$.

$a_{n+1} = (n + 1)! \cdot x_0^{n+1}; \qquad a_n = n! \cdot x_0^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n + 1)! \cdot x_0^{n+1}}{n! \cdot x_0^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n! \cdot (n + 1) \cdot x_0^n \cdot x_0}{n! \cdot x_0^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot |x_0| = +\infty$$

Zatem dla $x_0 \neq 0$ szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ jest rozbieżny.

Przykład 9

Szereg funkcyjny $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, którego wyrazy są określone w przedziale $(-\infty, +\infty)$ czyli dla $x \in \mathbb{R}$, jest zbieżny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Istotnie

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x \cdot x^n \cdot n!}{(n + 1) \cdot n! \cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n + 1} = 0$$

Czyli na podstawie kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

Szeregi funkcyjne potęgowe

W praktycznych zastosowaniach najważniejszymi szeregami funkcyjnymi są szeregi *potęgowe* postaci:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

lub

$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$

gdzie x_0 jest pewną stałą.

Stałe a_0, a_1, a_2, ... są nazywane współczynnikami szeregu potęgowego.

Jeśli przyjmiemy $z = x - x_0$, to postać druga szeregu potęgowego zamieni się na:

$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ czyli będzie taka sama jak postać pierwsza.

Szereg potęgowy jest zbieżny dla $x = 0$.
Co do zbieżności szeregu potęgowego dla innych wartości x zachodzą trzy przypadki:

1. Może się zdarzyć, że szereg potęgowy jest rozbieżny dla wszystkich x z wyjątkiem $x = 0$

Np. $1^1x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^nx^n + \ldots$, w którym wyraz ogólny $n^nx^n = (nx)^n$ rośnie nieograniczenie dla $nx > 1$.

Taki szereg potęgowy nie ma praktycznego znaczenia.

2. Szereg potęgowy, który jest zbieżny dla wszystkich x.

Np. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, którego sumą dla wszystkich wartości x jest funkcja e^x.

3. Zazwyczaj szereg potęgowy jest zbieżny dla pewnych x i rozbieżny dla innych.

Przykład 10
Szereg potęgowy postaci $1 + x + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ (postęp geometryczny) jest zbieżny dla $|x| < 1$ a rozbieżny dla $|x| \geqslant 1$.
Tu przedziałem zbieżności jest $(-1, 1)$.
Sumą tego szeregu potęgowego jest funkcja $\frac{1}{1-x}$

Przykład 11
Szereg potęgowy postaci $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} + 1$ jest zbieżny dla $|x| \leqslant 1$ i rozbieżny dla $|x| > 1$.
Przedział zbieżności jest równy $[-1, 1]$
Suma tego szeregu nie wyraża się przez funkcje elementarne.

Twierdzenie 2 (Obszar (przedział) zbieżności szeregu potęgowego)
Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ jest pewien przedział $(-R, R)$ symetryczny względem punktu $x = 0$. Czasem obie wartości krańcowe $x = -R$ i $x = R$ są włączone, czasem tylko jeden kraniec a czasem żaden.
R jest nazywane *promieniem zbieżności szeregu potęgowego.*
Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny tylko dla $x = 0$, to $R = 0$.
Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny dla wszystkich x, to $R = \infty$

Twierdzenie 3 (Znajdowanie promienia zbieżności)
Promień R zbieżności szeregu potęgowego

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

jest równy granicy wyrażenia $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ o ile taka granica istnieje. $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Przykład 12

Znajdziemy promień zbieżności szeregu:

$$\frac{0.1x}{1} - \frac{0.01x^2}{2} + \frac{0.001x^3}{3} - \ldots + \frac{(-0.1)^n x^n}{n} + \ldots$$

Rozwiązanie

Tu $a_n = \dfrac{(-0.1)^n}{n}$. Mamy więc:

$\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{0.1^n}{n} \cdot \dfrac{n+1}{0.1^{n+1}} = \dfrac{1}{0.1} \cdot \dfrac{n+1}{n} = 10 \cdot \dfrac{n+1}{n}$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} 10 \cdot \dfrac{n+1}{n} = 10.$

Czyli promień zbieżności tego szeregu potęgowego jest równy 10. (R=10).

Szeregi Taylora

Definicja 4

Szereg Taylora (jako szereg potęgowy względem $x - x_0$) funkcji $f(x)$ jest to szereg:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Gdy $x_0 = 0$, to szereg Taylora (jako szereg potęg x) jest postaci:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Przykład 13

Wyznaczmy szereg Taylora dla funkcji $f(x) = \dfrac{1}{5-x}$

Mamy $f(0) = \frac{1}{5}$; $\quad f'(0) = \dfrac{1}{5^2}$; $\quad f''(0) = \dfrac{2!}{5^3}$; $\ldots$; $f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{5^{n+1}}$ $\ldots$

Rozwinięcie w szereg Taylora tej funkcji ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}x + \frac{1}{5^3}x^2 + \ldots + \frac{1}{5^{(n+1)}}x^n + \ldots$$

Przykłady rozwinięć niektórych funkcji w szereg Taylora

Aby rozwinąć funkcję $f(x)$ w szereg Taylora względem $x - x_0$ musimy znaleźc pochodne $f'(x_0)$, $f''(x_0)$,$\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$,$\ldots$

Jeśli one istnieją i są skończone, to możemy utworzyć szereg Taylora:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Poniżej znajdują się rozwinięcia w szereg Taylora niektórych często używanych funkcji:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ promień zbieżności $R = \infty$

2. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$ promień zbieżności $R = \infty$

3. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ promień zbieżności $R = \infty$

4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ promień zbieżności $R = \infty$

Dzieląc wyrażenie 3 przez wyrażenie 4 otrzymamy szereg Taylora dla $\operatorname{tg} x$.

5. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$ promień zbieżności $R = \frac{\pi}{2}$

6. $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$ promień zbieżności $R = 1$

7. $\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots$ promień zbieżności $R = 1$

Uwaga

Formuły 6 i 7 zostały uzyskane przez całkowanie szeregu potęgowego:

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \ldots$$

Odejmując od wyrażenia 6 wyrażenie 7 otrzymamy:

8. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right]$ promień zbieżności $R = 1$

Przykład wykorzystania wzoru 8

Obliczyć $\ln 2$ z wykorzystaniem wzoru numer 8 przyjmując $x = \frac{1}{3}$ (oczywiście w przybliżeniu biorąc 4 początkowe wyrazy rozwinięcia)

Mamy wtedy: $\ln 2 = \ln\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{5} + \frac{(\frac{1}{3})^7}{7}\right]$ co daje 0.69300 błąd jest rzędu $1.39 \cdot 10^-4$.

Wartość $\log 2$ z dokładnością do 5 miejsc po przecinku jest równa 0.69315.

9. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots \quad (R = 1).$